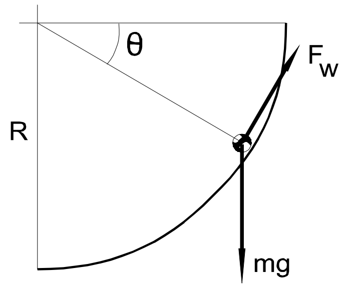
MAAK ELKE OPGAVE OP EEN APART VEL, voorzien van je **naam**.
Op vel 1: **studentnummer**, **naam**, **adres**, **postkode**, **woonplaats** en **studierichting**.
De onderdelen van de opgaven zijn veelal onafhankelijk van elkaar op te lossen. Ook al kun je een bepaald onderdeel niet oplossen, **probeer dan toch het vervolg** van de opgave.

cijfer = ($\sum$ punten) / 4 +1

Opgave 1. Glijbaan

Een puntvormige massa m glijdt langs een cirkelvormige goot. Afgezien van de zwaartekracht, ondervindt de massa daarbij een konstante wrijvingskracht F_W tegengesteld gericht aan de bewegingsrichting (zie figuur 1).

$$F_W = \frac{1}{2} m g$$



Figuur 1.

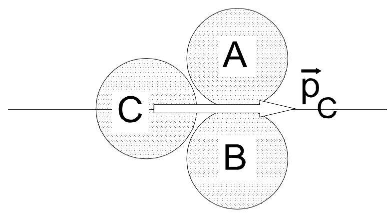
2 a. <u>Bereken</u> de hoekversnelling $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ als functie van de hoek θ.

2 b. <u>Laat zien</u> dat de snelheid van de massa maximaal is als $\theta = \frac{\pi}{3}$.

3 c. <u>Bereken</u> de maximale snelheid als de massa vanuit stilstand bij $\theta = 0$ wordt losgelaten.

Opgave 2. Snooker

Op een Snooker tafel liggen twee (identieke) ballen A en B tegen elkaar. Een derde bal C (identiek aan A en B) wordt daar tegenaan geschoten met een impuls $\vec{p}_C$ en raakt beide ballen tegelijkertijd (zie figuren 2a en 2b).



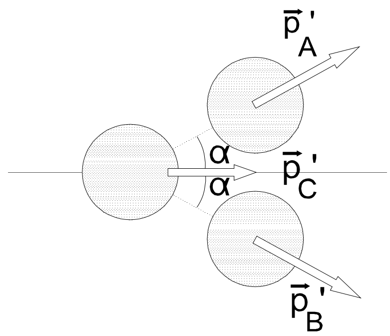
Figuur 2a.

2 a. <u>Bepaal</u> de hoek α waaronder de ballen A en B weggeschoten worden.

2 b. <u>Geef</u> het verband tussen de impuls $\vec{p}_C$ vóór de botsing en de impulsen $\vec{p}_A^{\,\prime}$, $\vec{p}_B^{\,\prime}$ en $\vec{p}_C^{\,\prime}$ nà de botsing.

Neem aan dat na de botsing bal C blijft liggen.

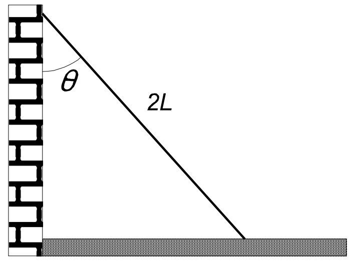
3 c. <u>Bereken</u> welk deel van de oorspronkelijke kinetische energie bij de botsing verloren is gegaan.



Figuur 2b.

Opgave 3. Vallende lat

Vanuit (vrijwel) vertikale stand begint een homogene lat met een lengte $2L$ en massa m te glijden, waarbij het ene uiteinde langs een gladde wand gaat en het andere uiteinde over een gladde vloer beweegt (zie figuur 3). Neem als oorsprong het hoekpunt van de muur en de vloer.



Figuur 3.

2 a. <u>Geef</u> de coördinaten van het zwaartepunt als functie van de hoek θ.

2 b. <u>Geef aan</u> waarom in deze situatie de wet van behoud van mechanische energie gebruikt mag worden.

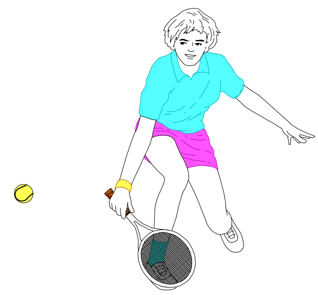
3 c. <u>Laat</u> met een berekening zien dat de hoeksnelheid

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}(1 - \cos(\theta))} = \sqrt{\frac{3g}{L}}\,.\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

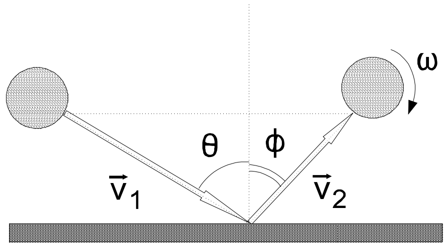
De oplossing voor de differentiaal-vergelijking uit c) kan geschreven worden als: $\tan(\frac{\theta}{4}) = a \, . \, e^{bt}$

3 d. <u>Bereken</u> de tijd die verstrijkt tussen het tijdstip t_1 dat de lat een hoek $\theta = \frac{\pi}{4}$ met de muur maakt en het tijdstip t_2 dat de lat op de grond ligt.

Opgave 4. Tennis



Een tennisbal met straal R nadert de grond met een snelheid $\vec{v}_1$ onder een hoek $\theta = \frac{\pi}{3}$ met de vertikaal (zie figuur 4a).
Gedurende de tijd dat de bal contact heeft met de grond ondervindt deze een normaalkracht F_n in vertikale richting en een wrijvingskracht $F_w = \mu \, . \, F_n$ in horizontale richting (zie figuur 4b). Hierin is μ de wrijvingscoëfficiënt.
Tengevolge van de wrijvingskracht gaat de bal draaien en verandert tevens de horizontale component van de snelheid.
De vertikale component van de snelheid is op het moment dat de bal van de grond loskomt evengroot als vlak voor het raken van de grond.
De snelheid van de tennisbal vlak na het loskomen van de grond is $\vec{v}_2$ en de hoeksnelheid is dan ω.

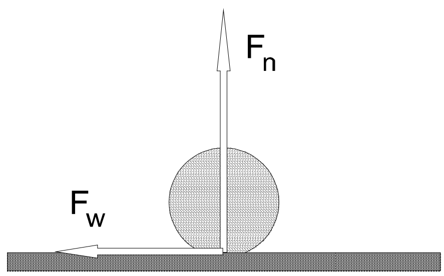


Figuur 4a.

2 a. <u>Geef</u> het verband tussen v_1 en v_2 en ϕ.

3 b. <u>Bereken</u>, uitgaande van impulsveranderingen in horizontale en vertikale richting, de wrijvingscoëfficiënt μ uitgedrukt in de hoek ϕ.

Het contact met de grond heeft zo lang geduurd dat de bal, op het moment dat deze de grond verlaat, niet meer slipt.



Figuur 4b.

2 c. <u>Geef</u>, uitgaande van deze voorwaarde, het verband tussen ω en v_1 en ϕ.

Gegeven is dat het traagheidsmoment van de tennisbal ten opzichte van een hoofdas: $I_x = \frac{2}{3} m R^2$

3 d. <u>Laat zien</u> dat $\tan(\phi) = \frac{3}{5}\sqrt{3}$.

2 e. <u>Bereken</u> het relatieve kinetische energieverlies $\frac{\Delta K}{K}$ van de tennisbal ten gevolge van deze botsing met de grond.

UITWERKING tentamen mechanica 23 11 1994

2 1a. $mr\theta'' = mg\cos(\theta) - F_w \quad \rightarrow \quad \theta'' = \frac{g}{r}(\cos(\theta) - \frac{1}{2})$

2 b. hoeksnelheid is maximaal als versnelling nul is: $\cos(\theta) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

3 c. Er geldt dan: $\frac{1}{2}mr^2\theta'^2 = mgr\sin(\theta) - F_w r\theta \quad \rightarrow$

$$v = r\theta' = \sqrt{gr(2\sin(\theta) - \theta)} = \sqrt{gr(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})} = 0{,}83\sqrt{gr}$$

2 2a. $\alpha = \frac{\pi}{6}$

2 b. $\vec{p}_C = \vec{p}_C{}' + \vec{p}_A{}' + \vec{p}_B{}'$

3 c. $\vec{p}_C = \vec{p}_A{}' + \vec{p}_B{}' \quad \rightarrow \quad p' = \frac{p_C}{2\cos(\alpha)} = \frac{1}{3}\sqrt{3}p_C$

zodat: $\Delta K = \frac{1}{2m}(p_C^2 - 2p'^2) = \frac{p_C^2}{2m}(1 - \frac{2}{3}) = \frac{1}{3}\frac{p_C^2}{2m}$

Er gaat dus 1/3 deel verloren.

2 3a. $x_{CM} = L\sin(\theta)$ en $y_{CM} = L\cos(\theta)$

2 b. De enige kracht die arbeid verricht is de zwaartekracht en dat is een conservatieve kracht.

3 c. Energiebehoud: $mgL = mgL\cos(\theta) + \frac{1}{2}mL^2\theta'^2 + \frac{1}{2}I\theta'^2$ met $I = \frac{1}{3}mL^2$

Hieruit volgt: $\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}(1 - \cos(\theta))} = \sqrt{3\frac{g}{L}}\,.\,\sin(\frac{\theta}{2})$

3 d. Invullen levert: $b = \frac{1}{2}\sqrt{3\frac{G}{L}}$.

Tevens geldt: $\tan(\frac{\pi}{16}) = 0{,}1989 = a\,.\,e^{bt_1}$ en $\tan(\frac{\pi}{8}) = 0{,}4142 = a\,.\,e^{bt_2}$

zodat: $t_2 - t_1 = \frac{1}{b}\ln(\frac{0{,}4142}{0{,}1989}) = 0{,}85\,.\sqrt{\frac{L}{g}}$

2 4a. $v_1\cos(\theta) = v_2\cos(\phi) \quad \rightarrow \quad v_1 = 2v_2\cos(\phi)$

3 b. De vertikale impulsverandering is $F_n t = mv_1\cos(\theta) + mv_2\cos(\phi) = mv_1$.

De horizontale impulsverandering is:

$F_w t = m(v_1\sin(\theta) - v_2\sin(\phi)) = m(\frac{1}{2}\sqrt{3}v_1 - \frac{1}{2}\tan(\phi)v_1)$

met $F_w t = \mu F_n t = \mu m v_1$ volgt: $\mu = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \tan(\phi))$

2 c. $\omega R = v_2\sin(\phi) = \frac{1}{2}v_1\tan(\phi)$

3 d. $I\omega = F_w t R \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3}mR^2\frac{1}{2R}v_1\tan(\phi) = \mu m v_1 R \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{1}{3}\tan(\phi)$

Tevens geldt: $\mu = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \tan(\phi))$ zodat: $\tan(\phi) = \frac{3}{5}\sqrt{3}$

2 e. $\frac{\Delta K}{K} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{1}{2}mv_1^2}$ Tevens geldt:

$v_2^2 = v_2\cos^2(\phi) + v_2\sin^2(\phi) = (\frac{1}{2}v_1)^2 + (\frac{1}{2}v_1\tan(\phi))^2 = \frac{52}{100}v_1^2$ en

$\omega R = \frac{1}{2}v_1\tan(\phi) = \frac{3}{10}\sqrt{3}v_1$ zodat: $\frac{\Delta K}{K} = 1 - 0.7 = 0.3$